http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 13 B

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en explicitant quels résultats sur la de dérivation vous utilisez :

a) $f(x) = (x^2 - 1)^7$
b) $f(x) = (\cos(x) + x^2)^2$
c) $f(x) = ((x+1)^2 + (x-1)^2)^2$
d) $f(x) = (((x+2)^2 + 2)^2 + 2)^2$

2. Pour les fonctions suivantes, déterminer si le Théorème de la valeur intermédiaire tient. Si oui, donner un exemple d'un point qui satisfait la conclusion. Si non, trouver au moins une hypothèse du théorème que la fonction ne satisfait pas.

a) $f(x) = x^2$ pour $x \in [-1, 3]$,
b) $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$,
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [1, 3]$,
d) $f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ pour $x \in [-2, 2]$.

3. Soit f différentiable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 1$.

a) Montrer qu'il existe $x \in]0, 2[$ tel que $f'(x) = \frac{1}{2}$.
b) Montrer qu'il existe $x \in]0, 2[$ tel que $f'(x) = \frac{1}{7}$.

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui satisfait $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction constante.

5. Montrer que $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
Astuce : étudier la fonction $f(x) = x - \sin(x)$.

6. Soit f différentiable sur $\mathbb{R}$ avec $a = \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 1$. Soit $s_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite (s_n) en posant $s_n = f(s_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que la suite (s_n) converge.
Astuce : montrer que $|s_{n+1} - s_n| \leq a|s_n - s_{n-1}|$ pour $n \geq 1$.
b) Montrer que la fonction f a un point fixe (c'est à dire qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ avec $f(s) = s$).